1.복소수

실수… 크기(있다), 양, 음(있다)
허수… 크기(없다), 양, 음(없다)

2.허수단위

제곱해서 -1 이 되는 수 ⇔± $\sqrt{-1}$

3.i^n 계산

$i=\sqrt{-1}$ $\quad i^5=i^4 \cdot i=i$ $\quad i^{100}=(i^4)^{25}=1$

$i^2=-1$ $\quad i^6=i^4 \cdot i^2=i^2=-1$ $\quad i^{101}=(i^4)^{25} \cdot i=i$

$i^3=-i$ $\quad i^7=i^4 \cdot i^3=i^3=-i$ $\quad i^{102}=(i^4)^{25} \cdot i^2=i^2=-1$

$i^4=1$ $\quad i^8=(i^4)^2=1$ $\quad i^{103}=(i^4)^{25} \cdot i^3=i^3=-i$

■ $i^n+i^{n+2}=0$

■ i^n … $\left(\begin{array}{l} i^{4k}=1 \\ i^{4k+1}=i \\ i^{4k+2}=i^2=-1 \\ i^{4k+3}=i^3=-i \end{array}\right.$

4.복소수 상등

a,b,c,d 가 실수

(1)$a+bi=c+di$ ➡ $a=c,\ b=d$

(2)$a+bi=0$ ➡ $a=0,\ b=0$

복소수의 상등 : 실수× 허수= 허수 (단, 실수 $\neq 0$), 실수+허수=허수 이다.

5.켤레 복소수

(1) 복소수α의 켤레복소수는 α의 허수부의 부호만을 바꾼 복소수를 말하며 $\overline{\alpha}$로 나타낸다.

$\rightarrow$ $\alpha=a+bi$ $\Rightarrow$ $\overline{\alpha}=a-bi$

(2) $\overline{(\overline{\alpha})}$ →켤레복소수의 켤레복소수는 자기 자신이다.

(3) 실수는 허수부가 0이므로 켤레복소수가 자기 자신이다.→x가 실수라면 $\overline{x}=x$

(4) 순 허수는 실수부가 0이다. 따라서 순 허수의 켤레복소수는 부호가 바뀐다.

→ α가 순허수 $\overline{\alpha}=-\alpha$ 허수 부의 부호가 반대인수

(5) 켤레 복소수 : 합과 곱이 항상 실수가 된다.

$z=a+bi \leftrightarrow \overline{z}=a-bi$

$z=3+i \leftrightarrow \overline{z}=3-i$ $\quad z+\overline{z}=2a$

$z=-1+i \leftrightarrow \overline{z}=-1-i$

$z \cdot \overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2=a^2+b^2$

(6)α, β가 복소수이면

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$, $\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$, $\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$,

$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$, $\overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)}=\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$

6.분모의 실수화

$$\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+i^2+2i}{1-i^2}=\frac{1-1+2i}{2}=i$$

※ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

7.음수제곱근 계산

(1) $a \leqq 0, b \leqq 0$ 일 때,

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i \cdot \sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$
$=-\sqrt{(-2)(-3)}$

(2)$a \geqq 0,\ b<0$ 일 때,

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

예제1

$(\sqrt{-2}+\sqrt{-3})^2$ 을 간단히 하여라.

➡ $=-2+(-3)+2\sqrt{-2}\,\sqrt{-3}=-5-2\sqrt{6}$

※복소수의 거듭제곱

복소수의 거듭제곱 $(a+bi)^n$은 그 값이 실수가 되거나 순 허수가 되는 지수 n이 반드시 존재한다. 따라서 지수가 큰 식의 값을 구하는 경우에는 거듭제곱의 값이 실수가 되는 지수 n부터 구하여야 한다.

다음은 기본적인 거듭제곱의 값이다.

①$i^2=-1\,, i^3=-i\,, i^4=1$ 예) $i^{133}=(i^4)^{33}i=i$

②$(1+i)^2=2i\,, (1+i)^4=-4$

③$(1-i)^2=-2i\,, (1-i)^4=-4$

예) $(1+i)^{100}=\{(1+i)^4\}^{25}=-4^{25}$

④ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=i,\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6=i-1$

⑤$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^3=-i,\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6=-1$

예)$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{99}=\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^6\right\}^{16}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3$

$=(-1)^{16}i^3=-i$

⑥$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$

⑦$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\qquad \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=-1$

예)$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}=\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3\right\}^{33}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

※ 음수의 제곱근1

$\sqrt{a}\,\sqrt{b}$에 대하여

①$a>0,b>0$인 경우에 $\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 되는 것은 생략

②$a>0,b<0$인 경우에 $b=-B$(단, $B>0$)로 나타낼 수 있다. 따라서

$\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{a}\,\sqrt{-B}=\sqrt{a}\,\sqrt{B}i=\sqrt{aB}i=\sqrt{-aB}$

$=\sqrt{ab}$가 성립함을 알 수 있다.

③$a<0,b>0$인 경우에 위와 같은 이유로

$\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립함을 알 수 있다.

④$a<0,b<0$인 경우에

$a=-A,b=-B$(단, $A,B>0$)에 대하여

$\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{-A}\,\sqrt{-B}=\sqrt{A}i\,\sqrt{B}i=\sqrt{AB}i^2$

$=-\sqrt{AB}$

$=-\sqrt{(-A)(-B)}=-\sqrt{ab}$가 성립함을 알 수 있다.

이 경우에는 $\sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$가 성립하지 않는다. 따라서

$a<0,b<0 \iff \sqrt{a}\,\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ 임을 알수 있다.

※ 음수의 제곱근2

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$에 대하여

①$a>0,b>0$인 경우에 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$가 되는 것은 생략

②$a<0,b>0$인 경우에 $a=-A\,(A>0)$에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{A}i}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{A}{b}}i=\sqrt{-\frac{A}{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

③$a>0,b<0$인 경우에 $b=-B$(단, $B>0$)로 나타낼 수 있다. 따라서

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-B}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{B}i}=\sqrt{\frac{a}{B}}\frac{1}{i}=\sqrt{\frac{a}{B}}\frac{i}{i^2}=-\sqrt{\frac{a}{B}}i$

$=-\sqrt{-\frac{a}{B}}=-\sqrt{\frac{a}{-B}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립함을 알 수 있다. 즉, $a>0,b<0 \iff \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ 임을 알 수 있다.

④$a<0,b<0$인 경우에

$a=-A,b=-B$(단, $A,B>0$)에 대하여

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{-A}}{\sqrt{-B}}=\frac{\sqrt{A}i}{\sqrt{B}i}$

$=\sqrt{\frac{A}{B}}=\sqrt{\frac{(-A)}{(-B)}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 가 성립